1. Summations

Khi một thuật toán có các cấu trúc lặp như vòng lặp while hay vòng lặp, chúng ta có thể tính toán thời gian thực hiện là tổng thời gian thực thi của mỗi thân vòng lặp. Ví dụ như, với thuật toán Insertion Sort có thời gian thực thi tương ứng với j trong trường hợp tệ nhất. Bằng cách tính tổng thời gian thực thi trên mỗi vòng lặp, ta thu được một tổng (một chuỗi).

Khi chúng ta đánh giá tổng này, ta thu được giới hạn trong trường hợp xấu nhất của thời gian chạy thuật toán này. Ví dụ này minh họa cho lí do tại sao bạn nên biết các thao tác và tính các giới hạn của tổng.

Phần A.1 đưa ra chuỗi các công thức liên quan tới tổng. Phần A.2 đưa ra những công thức để tính giới hạn tổng. Trong phần A.1 sẽ đưa ra các công thức mà không đưa ra cách chứng minh, tuy nhiên cách chứng minh của một số công thức trong A.1 sẽ được đề cập tới trong phần A.2 để mô tả cho các phương pháp liên quan. Ngoài ra, có thể tìm được hầu hết các cách chứng minh trong các sách calculus.

*A.1 Công thức tổng và tính chất.*

Cho một chuỗi số , với n là một số không âm, chúng ta có thể viết tổng hữu hạn như sau

Nếu n = 0 thì giá trị của tổng này sẽ bằng 0. Giá trị của tổng hữu hạn này là một con số cụ thể, và chúng ta có thể cộng chuỗi này theo thứ tự bất kỳ.

Cho một chuỗi số vô hạn Chúng ta có thể viết lại tổng vô hạn như sau

Chúng ta có thể xét ý nghĩa chuỗi dựa vào giới hạn

Nếu giới hạn không tồn tại, chuỗi này phân kỳ **(diverges)**. Ngược lại, chuỗi hội tụ **(converges)**. Chuỗi hội tụ là chuỗi số thường không thể cộng lại theo thứ tự bất kỳ. Tuy nhiên, chúng ta có thể sắp xếp lại thành chuỗi số hội tụ tuyệt đối **(absolutely converges series)**, là một chuỗi mà chuỗi cũng hội tụ.

**Linearly (Tính tuyến tính)**

Cho 2 số thực c bất kỳ và hai chuỗi số và thì

Tính chất tuyến tính này cũng áp dụng cho chuỗi vô hạn hội tụ.

Chúng ta có thể khai thác tính chất tuyến tính để khai thác phép tính tổng cùng với các ký hiệu tiệm cận. Ví dụ như:

Trong công thức này, ký hiệu ở vế trái được áp dụng cho biến k nhưng ở vế phải được áp dụng vào biến n. Chúng ta cũng có thể sử dụng công thức này cho chuỗi vô hạn hội tụ.

**Chuỗi số học (**Arithmetic series)

là một chuỗi số học với giá trị tổng là

Tổng bình phương và lập phương (Sum of squares and cubes)

**Chuỗi hình học (Geometric series)**

Với số thực , tổng của

Là một chuỗi hình học hay chuỗi lũy thừa và có giá trị là

Khi chuỗi có vô hạn phần tử và , chúng ta có chuỗi hình học vô hạn giảm dần (infinity decreasing geometry series)

**Chuỗi điều hòa (Harmonic Series)**

Với một số nguyên dương n, số điều hòa thứ n là

**Tích phân và đạo hàm các chuỗi (Intergrated and differentiating series)**

Bằng cách tích phân hoặc đạo hàm các chuỗi ở trên, ta sẽ có thêm nhiều công thức nữa. Ví dụ như, bằng cách đạo hàm hai vế của chuỗi hình học vô hạn và nhân với x, ta được

**Chuỗi lồng (Telescoping series)**

Với một dãy bất kỳ

Bởi vì mỗi phần tử được thêm vào và trừ ra một lần duy nhất. Ta gọi đó là chuỗi lồng. Tương tự,

Một ví dụ khác về chuỗi lồng, ta xét

Ta có

Do đó:

**Nhân**

Ta có thể viết phép nhân một dãy vô hạn như sau

Nếu n = 0, giá trị nhân sẽ là 1. Chúng ta có thể chuyển một công thức cộng thành công thức nhân bằng phép *identity*.

Bài tập

A.1-1. Find simple form.